

SZOTE Központi Kutató Laboratórium

Járvány-terjedési modellek

(referátum)

Győri István

1942-ben Wilson és Burke publikált egy matematikai modellt, amely egy adott populáción belül a járványhullámok terjedését vizsgálta. Ezt a modellt teljes matematikai korrektséggel 1945-ben Wilkins analizálta.

Bár ilyen jellegű modellek már korábban is voltak, így pl: 1923-ban Lotka malária-járványra vonatkozó matematikai analízise, mégis Wilson dolgozata az, amely alapján a kutatók nagy számban publikáltak hasonló determinisztikus és sztochasztikus modelleket. Ezen nagyszámu dolgozat összefoglalását Bailey "A járványterjedés matematikai elmélete" című könyvében gyűjtötte össze. A könyv 1957-ben jelent meg.

Wilson és Burke már említett munkája alapján K. L. Cooke 1967-ben közölt egy modellt, amelyet Frank Hoppensteadt és Paul Waltman 1970-ben ill. 1971-ben lényegesen továbbfejlesztett.

Előadásomban a Cooke-féle modellt fogom ismertetni, megemlítve a megjelenése óta született általánosításokat is.

A Cooke-féle elképzelés lényege a következő: felteszi, hogy a még nem fertőzött individuum nem kap rögtön fertőzést, ha találkozik egy fertőző individuummal, csak akkor, ha ezek a találkozások többször megtörténnek, ugyanis minden individuum rendelkezik bizonyos rezisztenciával a fertőzéssel szemben. Továbbá létezik egy olyan küszöb, amelynél kisebb dózis hatására nem jön létre fertőzés, sőt a küszöb átlépése esetén is csak bizonyos késleltetéssel válik egy fertőzött egyén fertőzővé. Ezek a feltevések Watt egy 1964-ben megjelent dolgozatán alapulnak, ő ugyanis felhívta a figyelmet arra, hogy a biológiai mechanizmusok széles skálája kumulatív, késleltetett és küszöbhatással rendelkező. Watt az előzőeket biológiai példákkal is alátámasztotta.

Ezután tekintsük a modellt.

Ha van N egyedből álló populációnk, akkor azt fertőzés szempontjából a következő négy csoportra oszthatjuk fel:

- 1.) Az érzékeny exponáltan egyének, akik számát egy t időpillanatban jelölje $S(t)$,
- 2.) Az exponált, de nem fertőző egyének, akik számát jelölje $E(t)$,
- 3.) Fertőző egyének, akik számát jelölje $I(t)$,
- 4.) A felépült és érzéketlen egyének, ezek számát jelölje $R(t)$.

Ha most feltételezzük, hogy új egyének nem lépnek be a populációba és minden fertőzött egyén felgyógyul, akkor nyilvánvaló, hogy minden t időpillanatban

$$S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Tételezzük fel, hogy az egy egyénre ható fertőzések kumulativok és az a dózis, amit ő egy rövid h idő alatt kap, arányos a h -val és a környezetben lévő fertőző egyének számával.

Igy egy individuum, amelyet egy időben fertőztek először egy $t > \tau$ időig, az

$$\int_{\tau}^t \rho(x) I(x) dx$$

dózis fogja kapni, ahol $\rho(x)$ egy arányossági faktor.

Mivel minden egyén rendelkezik egy természetesen rezisztenciával a fertőzés ellen, így az csak akkor jön létre, ha a kapott dózis nagysága elér egy $m > 0$ küszöbértéket, azaz

$$\int_{\tau(t)}^t \rho(x) I(x) dx = m.$$

Feltételezzük, hogy ez az m küszöb minden individuumra minden időpillanatban állandó.

Ha tekintünk most egy t ill. $t+h$ időpillanatot, és $S(t)$ ill. $S(t+h)$ ezen időpillanatokban az érzékeny, de nem fertőzött egyének száma, akkor

$$S(t+h) - S(t) = -r(t) S(t) I(t)h$$

azaz $S(t+h) - S(t) = -\bar{r}(t) S(t) I(t)$

vagy más módon kifejezve (h kicsi):

$$S'(t) = -r(t) S(t) I(t).$$

ahol $r(t)$ egy arányossági faktor.

Végül még egy feltételezést teszünk: minden fertőzött egyén a fertőzéstől számított rögzített idő alatt felgyógyul.

Induljon az egész eljárás a $t=0$ -ban és legyen

$$I(0) + S(0) = N,$$

azaz a populáció álljon $I(0)$ fertőző és $S(0)$ érzékeny fertőzetlen individuumból.

Ekkor különböző megfontolások alapján levezethető a következő három alapegyenlet:

$$\int_{\tau(t)}^t \rho(x) I(x) dx = m$$

$$S'(t) = -r(t) I(t) \cdot S(t)$$

$$I(t) = \begin{cases} I_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ I_0 + S_0 - S(\tau(t)) & t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma \\ S(\tau(t-\sigma)) - S(\tau(t)) & t_0 + \sigma \leq t < \infty \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq t_0$$

$$t_0 \leq t \leq t_0 + \sigma$$

$$t_0 + \sigma \leq t < \infty$$

Ezen egyenletekből $I(t)$ kiküszöbölhető, így az

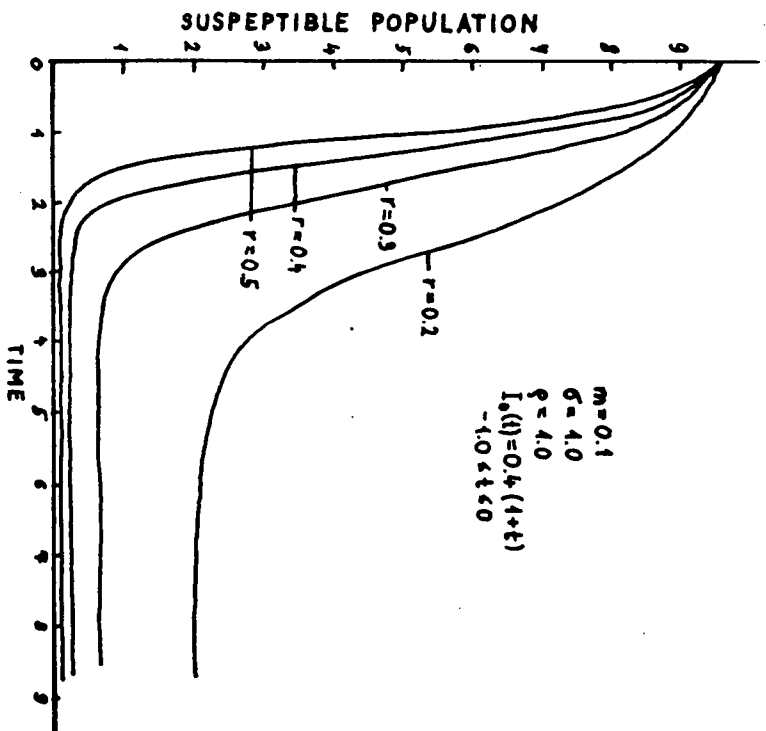
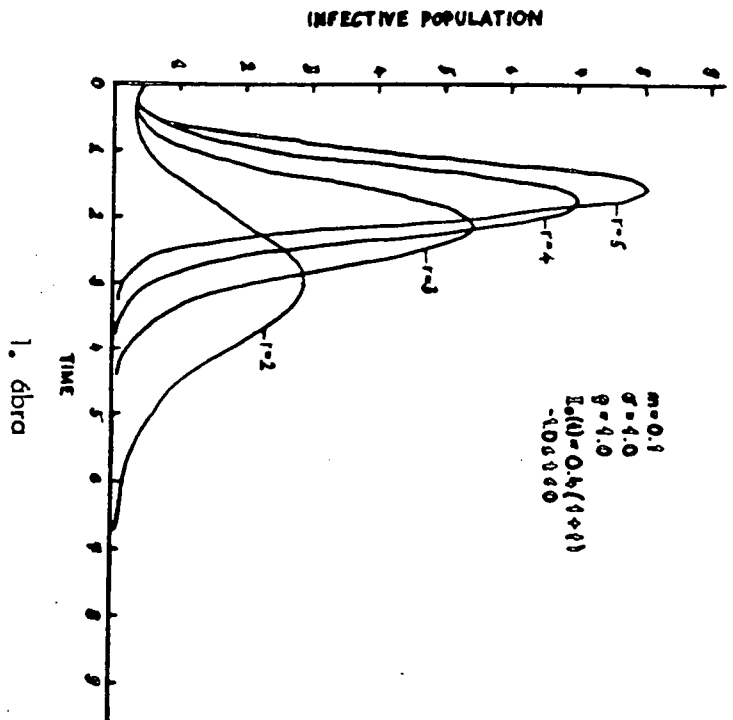
$$\int_{\tau(t)}^t \frac{\rho(x) S'(x)}{r(x) S(x)} dx = -m$$

$$t_0 + \sigma \leq t < \infty$$

$$S'(t) = -r(t) S(t) [S(\tau(t-\sigma)) - S(\tau(t))]$$

egyenleteket nyerjük.

A fenti modellben lényeges feltétel, hogy az m küszöb ill. a σ érték egyéntől független. Ez általában nincs így, ezért m -ről ill. σ -ról fel kell tenni, hogy a véletlentől függ, így a modell sztochasztikus lesz.



2. dbra

Másik általánosítás:

Ha a fenti populációban állandó jelleggel jelen van bizonyos számú fertőző, akkor a modell módosul. A fenti szerzők ezt az esetet is tárgyalják, sőt Hethcote (1970) megmutatja, hogy ekkor

$$S(\infty) = 0 ,$$

azaz az idők folyamán minden egyén exponálttá válik. Ez érthető, hiszen a fertőzést hordozók végül is mindenkihez eljutnak.

A fenti matematikai modell Hoppensteadt és Waltman által adott számítógépes realizációja az 1. ill. 2. ábrán látható.

I R O D A L O M

- K. L. Cooke: Functional-differential equations: Some models and perturbation problems, in differential equations and dynamical systems, Academic Press, New York, 1967.
- Frank Hoppensteadt and Paul Waltman: A Problem in the Theory of Epidemics. Mathematical Biosciences, Vol. 9, 1970.
- Frank Hoppensteadt and Paul Walman: A Problem in the Theory of Epidemics, II. Mathematical Biosciences, Vol. 12, Num. 1/2, 1971.
- K. E. F. Watt: Computers and the evaluation of resource management strategies. Amer. Sci. 52, 1964.
- N. T. J. Bailey: The mathematical theory of epidemics. Hafner, New York, 1957.